Filtros e Ultrafiltros

Douglas de Araujo Smigly

Definição 1. Seja X um conjunto. Uma *álgebra de conjuntos* é uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tais que

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$;

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Uma família de conjuntos $\mathfrak{B}$ é *centrada* se $B_0 \cap \ldots \cap B_n \neq \emptyset$, $B_0, \ldots, \in \mathfrak{B}, n \in \omega$.

Definição 2. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos em X. Uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ é chamada de *filtro* se

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

(iii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \{B \in \mathcal{A} : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{F}$.

Se $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathcal{P}(X)$, diremos que $\mathcal{F}$ é um filtro de X. Um filtro que é maximal com respeito à inclusão (isto é, não está contido propriamente em nenhum outro filtro) é chamado *ultrafiltro*.
Se $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$, o filtro é dito *livre*.

Filtros são muito úteis ~~para fazer café~~ em diversas construções matemáticas em Topologia, Teoria dos Conjuntos e Teoria dos Modelos. Vamos ver alguns exemplos de filtros.

Exemplo 1. Seja $X = \{a, b, c\}$. Então, o conjunto

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

é um filtro de $\mathcal{P}(X)$. De fato, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$. Além disso, $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \in \mathcal{F}$ e $\{a, b\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b\} \in \mathcal{F}$. Finalmente, note que:

♠ $\{a\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{B \in \mathcal{P}(X) : \{a\} \subseteq B\} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \subseteq \mathcal{F}$;

♣ $\{a, b\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{B \in \mathcal{P}(X) : \{a, b\} \subseteq B\} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \subseteq \mathcal{F}$;

♥ $\{a, b, c\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{B \in \mathcal{P}(X) : \{a, b, c\} \subseteq B\} = \{\{a, b, c\}\} \subseteq \mathcal{F}$.

Exemplo 2. Seja $X = \{a, b, c\}$. Então, o conjunto

$$\mathcal{F} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\{a, b, c\}\}$$

é um filtro de $\mathcal{P}(X)$, com verificação análoga a do exemplo anterior. Além disso, ele é um ultrafiltro principal, e é centrado em $\{a\}$.

Exemplo 3. Seja $X = \mathbb{N}$. O conjunto

$$\mathfrak{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \text{ é finito.}\}$$

é um filtro do reticulado $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Note que $\emptyset \notin \mathfrak{F}$ e $\mathbb{N} \in \mathfrak{F}$, pois $\mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$ não é finito, enquanto $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset$ é. Sejam $A, B \in \mathfrak{F}$. Então, $\mathbb{N} \setminus A$ e $\mathbb{N} \setminus B$ são finitos. Pelas Leis de De Morgan,

$$\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$$

é finito, pois é união de dois conjuntos finitos, o que implica $A \cap B \in \mathfrak{F}$. Se $A \in \mathfrak{F}$, então $\mathbb{N} \setminus B$ é finito $\forall\ B \supseteq A$. Logo, é claro que $\{B \in \mathbb{N} : A \subseteq B\}$ contém apenas conjuntos com complementar finito, que pertencem a $\mathfrak{F}$.
Logo, $\mathfrak{F}$ é um filtro, conhecido como *filtro de Fréchet* ou *filtro cofinito*. Este é um exemplo de filtro livre que não é um ultrafiltro.

Exemplo 4. Seja X um conjunto não-enumerável. Considere

$$\mathfrak{G} = \{A \subseteq X : (X \setminus A) \text{ é enumerável.}\}$$

Então, $\mathfrak{G}$ é um filtro de $\mathcal{P}(X)$.
Deixamos a verificação dos detalhes para o leitor.

Exemplo 5. Seja $a \in \mathbb{N}$. Então

$$\mathcal{F}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : a \in A\}$$

é um ultrafiltro que não é livre.

Pode-se notar que nenhum exemplo de ultrafiltro livre foi fornecido acima. Após uma exaustiva busca, nenhum exemplo de filtro que satisfizesse essa condição foi encontrado. Poderíamos suspeitar que tal tipo de filtro não existe.
Apesar de não ser conhecido um exemplo explícito de ultrafiltro livre, podemos usar o Axioma da Escolha para provar que tal filtro existe. A existência de ultrafiltros livres é de crucial importância para a construção dos números reais não-standard.

Teorema 1. *Todo ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$ pode ser extendido para um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}_0$ um filtro em $\mathbb{N}$ e denote S o conjunto de todos os filtros livres em $\mathbb{N}$ contendo $\mathcal{F}_0$,

$$\mathsf{S} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \text{ e } \mathcal{F} \text{ é um filtro livre.}\}$$

Observe que $\mathsf{S} \neq \emptyset$, pois $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}$. Introduziremos uma ordem parcial em S com a inclusão natural. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia em S, tal que $\forall \mathcal{F}_i \in \mathcal{C}$, ou $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$. Seja $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$. Vamos mostrar que $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$, ou seja, que $\mathcal{G}$ é um filtro livre que contém $\mathcal{F}_0$.

Afirmação. $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$ *é um filtro.*

Prova. Basta mostrar que $\mathcal{G}$ satisfaz as condições da definição 2.

♠ $\emptyset \notin \mathcal{G}$ e $\mathbb{N} \in \mathcal{G}$. Suponha por absurdo que $\emptyset \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}$, existe algum $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$, uma contradição, já que $\mathcal{F}$ é um filtro livre.

♣ Se $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$. Como $A, B \in \mathcal{G}$, então $A \in \mathcal{F}_i$ e $B \in \mathcal{F}_j$ para algum $\mathcal{F}_i$ e algum $\mathcal{F}_j$ em $\mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ é uma cadeia, $A \cap B \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, e $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$ também é um filtro, o que implica $A \cap B \in \mathcal{G}$.

- ♥ $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \{B \in \mathbb{N} : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{G}$. Seja $X \in \mathcal{G}$ e $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Suponha $X \subseteq Y$. Então, $X \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ está na união de $\mathcal{G}$. Já que $\mathcal{F}$ é um filtro livre e $X \subseteq Y$, então $Y \in \mathcal{F}$. Consequentemente, Y está em $\mathcal{G}$.

$\square$

Afirmação. *O filtro* $\mathcal{G} = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{C}} \mathcal{F}$ *é livre.*

Prova. ♦ Vamos mostrar que $\bigcap_{A\in\mathcal{G}} A = \emptyset$.

Suponha por absurdo que, para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in \bigcap_{A\in\mathcal{G}} A$$

Então $(\forall x \in \mathcal{G})(n \in \mathbb{N})$, o que implica que para algum $\mathcal{F}$ em $\mathcal{C}$, temos

$$n \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A,$$

o que é uma contradição, pois $\mathcal{F}$ é um filtro livre.

$\square$

Essas duas afirmações nos permite concluir que $\mathcal{G} \in \mathsf{S}$. Então, para qualquer cadeia em S existe uma cota superior $\mathcal{G}$.
Utilizando o Lema de Zorn, sabemos que S contém um elemento maximal, digamos $\mathcal{T}$. Por construção, sabemos que $F_0 \subseteq \mathcal{T}$, o que prova que todo filtro livre pode ser extendido para um ultrafiltro livre. $\square$

Vamos ver algumas propriedades e caracterizações importantes dos ultrafiltros.

Teorema 2. *Considere* $X \neq \emptyset$ *e* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de conjuntos de* X. *Sejam* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *tais que*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U},$$

onde $\mathcal{U}$ *é um ultrafiltro de* X. *Então,* $A_i \in \mathcal{U}$ *para ao menos um valor de* i. *Além disso, se os conjuntos forem mutuamente disjuntos, então* $A_i \in \mathcal{U}$ *para exatamente um* i.

Demonstração. Seja $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{U}$. Suponha por contradição que nem $A_1 \in \mathcal{U}$ e nem $A_2 \in \mathcal{U}$. Observe que

$$\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{A} | A_1 \cup X \in \mathcal{U}\}$$

também é um filtro em X. Além disso, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. E $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{G}$ porque $A_2 \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{U}$, o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{U}$. Se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ e $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ implica que $\emptyset \in \mathcal{U}$, uma contradição.
Vamos concluir a propriedade desejada utilizando indução. O caso base $n = 2$, foi feito acima.
Suponha que a afirmação seja válida para $n = k$, ou seja, para $A_1, A_2, ..., A_k \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \in \mathcal{U}$, existe ao menos um i tal que $A_i \in \mathcal{U}$.
Então, para $A_1, A_2, ..., A_{k+1} \in \mathcal{A}$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1} \in \mathcal{U}$, pela hipótese de indução, sabemos que existe ao menos um i tal que $A_i \in \mathcal{U}$ para $1 \leq i \leq k$. Como

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k+1} \in \mathcal{U}$$

segue o resultado. $\square$

Teorema 3. *Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{A}$ uma álgebra de conjuntos de X. Considere $\mathcal{F}$ um ultrafiltro em $\mathbb{N}$. São equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ é maximal (ultrafiltro).*

(ii) *Para todo $A \in \mathcal{A}$, então $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Seja $A \in \mathcal{A}$. Se $A \in \mathcal{F}$, não há o que fazer. Se $A \notin \mathcal{F}$, então $A \cup (X \setminus A) = X \in \mathcal{F}$, e $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.
Faça $B_1 = A$ e $B_2 = X \setminus A$. Então $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ e $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{F}$. Pelo Teorema 2, existe ao menos um $i \leq 2$ tal que $B_i \in \mathcal{F}$. Como $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, existe exatamente um i tal que $B_i \in \mathcal{F}$. Como $B_1 = A \notin \mathcal{F}$, segue que $B_2 \in \mathcal{F}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha por absurdo que $\mathcal{F}$ não é maximal. Então, $\mathcal{F}$ está propriamente contido em algum filtro livre $\mathcal{G}$. O complemento de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ irá consistir de algum conjunto $\mathcal{B} \in \mathcal{G}$ onde $\mathcal{B} \notin \mathcal{F}$. Por hipótese, $X \setminus \mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, isso implica que ambos $\mathcal{B}$ e $X \setminus \mathcal{B}$ estão em $\mathcal{G}$. Então como $\mathcal{G}$ é fechado para intersecções por ser um filtro,

$$\mathcal{B} \cap (X \setminus \mathcal{B}) = \emptyset \in \mathcal{G}$$

o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{F}$ é maximal.

□

O resultado abaixo nos permitirá checar com facilidade se um filtro $\mathcal{U}$ de $\mathbb{N}$ é um ultrafiltro livre.

Teorema 4. *Seja*

$$\mathscr{F}_r = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \text{ é finito.}\}$$

o filtro de Fréchet.
Um ultrafiltro $\mathcal{U}$ em $\mathbb{N}$ é livre se e somente se $\mathscr{F}_r \subset \mathcal{U}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro livre em $\mathbb{N}$. Suponha por absurdo que $\mathscr{F}_r \not\subseteq \mathcal{U}$. Issso implica que existe um $\mathcal{S} \in \mathscr{F}_r$ tal que $\mathcal{S} \notin \mathcal{U}$. Pelo Teorema 3, se $\mathcal{S} \notin \mathcal{U}$, então o conjunto finito $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$ está em $\mathcal{U}$, contradizendo que $\mathcal{U}$ é um filtro livre.
($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em $\mathbb{N}$ tal que $\mathscr{F}_r \subset \mathcal{U}$. Suponha por absurdo que $\mathcal{U}$ não é livre. Então, $\exists\ a \in \mathbb{N}$ tal que

$$a \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset$$

uma contradição. □

Dizemos que um ultrafiltro $\mathfrak{P}$ em X é *principal* se pode ser escrito da forma

$$\mathfrak{P} = \{A \in X | x \in A\}$$

para algum $x \in X$. Caso contrário, $\mathcal{P}$ é chamado *não-principal.*

Proposição 1. *Seja X um conjunto infinito. Então existe um ultrafiltro não-principal em X.*

Demonstração. Seja

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \aleph_0\}$$

Esta família é um filtro. Todo ultrafiltro extendendo $\mathscr{F}$ é não-principal. □

Dado um conjunto X, denotamos por βX a família de todos os ultrafiltros de X e por $\beta^* X$ a família de todos os ultrafiltros não-principais de X.
Dado um filtro, vamos agora ver maneiras de ordenar seus elementos, como a pré-ordem de Rudin-Keisler

Definição 3 (Ordenação de Rudin-Keisler)**.** Se $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro em $\mathcal{P}(X)$, e $\mathcal{V}$ um ultrafiltro em $\mathcal{P}(Y)$, então $\mathcal{V} \geq_{RK} \mathcal{U}$ se existe uma função $f \colon X \to Y$ tal que

$$Z \in \mathcal{V} \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$$

$\forall Z \subseteq Y$.
$\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são *Rudin-Keisler equivalente* se existem conjuntos $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{V}$ e uma bijeção $f \colon A \to B$ que satisfaz as condições acima. Utilizamos como notação $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V}$.

Sabe-se que $\equiv_{RK}$ é o kernel de $\leq_{RK}$, isto é, $\mathcal{U} \equiv_{RK} \mathcal{V}$ se, e somente se, $\mathcal{V} \geq_{RK} \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \geq_{RK} \mathcal{V}$.

Referências

[1] M. Garcia, *Filters and Ultrafilters in Real Analysis*, `arxiv.org/pdf/1212.5740.pdf`.

[2] W. Kubiś, *Infinitary combinatorics with applications in mathematical analysis*, parte 1, Praga: Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2013.

[3] K. Kunen, *Set Theory : An Introduction to Independence Proofs*, North Holland Publ. Co., Studies in Logic Series, 102, Amsterdam, 1980.

[4] F. Miraglia, *Teoria dos Conjuntos : Um Mínimo*, EDUSP, 1990.